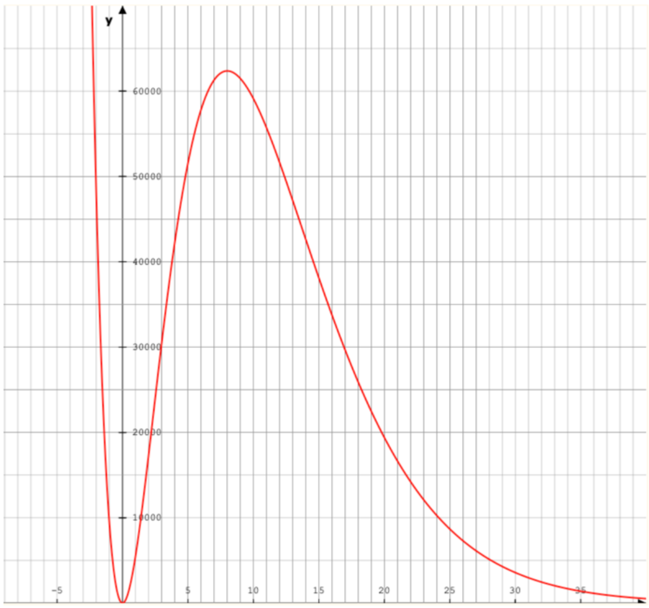
Rückstaubecken

LK/GK-Klausur von 2020 zum Thema e-Funktionen

Aufgrund der wechselnden Pegelstände eines Flusses wird für diesen ein Rückstaubecken gebaut, damit er bei Hochwasser nicht über die Ufer tritt. Nach langen Regenfällen beobachtet ein Hydrologe den Zufluss des Flusswassers in das Rückhaltebecken über einen Zeitraum von 40 Stunden. Er stellt fest, dass die Zuflussrate des Flusswassers in das Rückstaubecken durch die Funktion f mit

$$f(t) = 7200 \cdot t^2 \cdot e^{-0{,}25t}, t \in \mathbb{R}, 0 \leq t \leq 40$$

beschrieben werden kann. Dabei gibt t die Zeit in Stunden und $f(t)$ die Zuflussrate in m³ pro Stunde an.



a) (1) Berechnen Sie $f(20)$ und interpretieren Sie den Wert im Sachzusammenhang.

(2) Gegeben ist die Funktion $f'(t)$ mit $f'(t) = 7200(2t - 0{,}25t^2) \cdot e^{-0{,}25t}$.

Weisen Sie nach, dass $f'(t)$ die erste Ableitung von $f(t)$ ist.

(3) Berechnen Sie, wann die Zuflussrate maximal ist und geben sie außerdem die maximale Zuflussrate an.

Gegeben ist $F(t) = 7200 \cdot (-128 - 32t - \ 4t^2) \cdot e^{-0{,}25t}$.

b) (1) Weisen Sie nach, dass $F(t)$ eine Stammfunktion von $f(t)$ ist.

Der Hydrologe möchte nun von der Zuflussrate auf die gesamte Wassermenge im Becken schließen.

(2) Geben Sie eine Funktion $w(t)$ an, mit deren Hilfe er die tatsächliche Wassermenge im Becken bestimmen kann.

(3) In den 40 Stunden der Beobachtung fließen etwa 920 000 m³ Flusswasser in das Becken. Die Gleichung

$$\int_t^{t+8} f(u)du = 0{,}5 \cdot 920\,000$$

hat drei Lösungen t_1, t_2 und t_3. Erklären Sie die Bedeutung der Gleichung und der Werte t_1, t_2 und t_3 im Sachzusammenhang.

c) Damit das Rückstaubecken nicht überläuft, kann Wasser auch zurück in den Fluss geleitet werden. Die Funktion $g_a(t)$ beschreibt dabei die momentane Abflussrate des Wassers aus dem Rückstaubecken zurück in den Fluss. Da der Abfluss von den Gegebenheiten abhängt ist er nicht eindeutig sondern es gilt

$$g_a(t) = 3600 \cdot a \cdot t^3 \cdot e^{-0{,}25t}, a, t \in \mathbb{R}, 0 \leq t \leq 40, a > 0.$$

Dabei gibt t wieder die in Zeit Stunden und $g_a(t)$ die Abflussrate in m³ pro Stunde an.

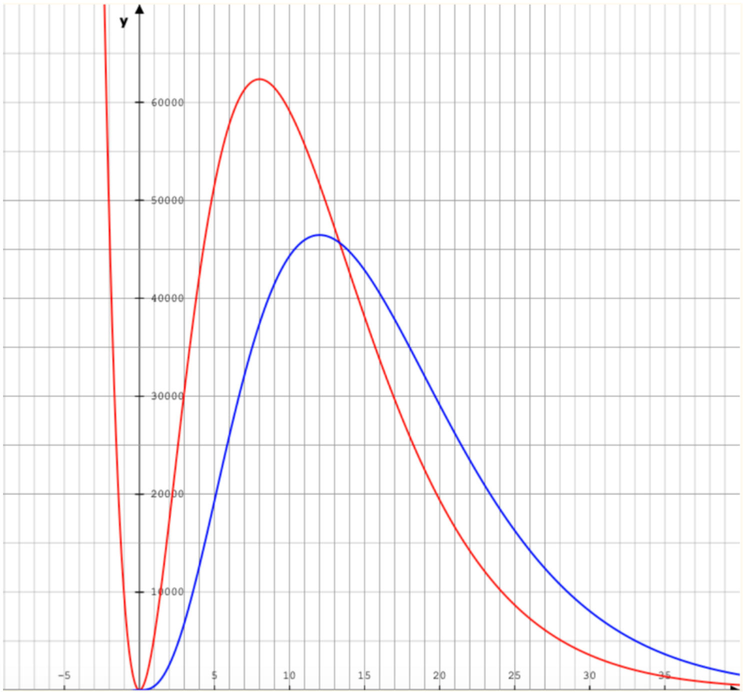
(1) Berechnen Sie den HP von $g_a(t)$ und weisen Sie nach, dass er unabhängig von a ist.

Für $a = 0{,}15$ ist $g_{0,15}(t) = 540 \cdot t^3 \cdot e^{-0{,}25t}$.

(2) Bestimmen Sie für $g_{0,15}(t)$ den Zeitpunkt, zu dem die Abflussrate 35.000 m³ pro Stunde beträgt (GK).

(3) Ermitteln Sie (rechnerisch?) den Zeitpunkt, zu dem die Abflussrate am stärksten zunimmt. Sie dürfen dabei ohne Nachweis $g'(t) \ = -135 \cdot (t^3 - 12t^2) \ \cdot \mathrm{e}^{-0{,}25t}$ verwenden (GK).

d) In der Abbildung sind $g_{0,15}(t) = 540 \cdot t^3 \cdot e^{-0,25t}$ und $f(t)$ dargestellt.



(1) Lesen Sie am Graph ab, wann die Wassermenge im Becken maximal ist. Erläutern Sie Ihre Vorgehensweise.

Betrachten Sie nun die Funktion $d(t) = f(t) - g_{0,15}(t),\ 0 \le t \le 40.$

(2) Berechnen Sie $d(10)$ und $d(20)$ und interpretieren Sie die Werte im Sachzusammenhang (GK).

(3) Zeigen Sie, dass sich am Ende des Beobachtungszeitraums mehr Wasser im Becken befindet als zu Beginn.

(4) Geben Sie einen Ansatz an um a so zu berechnen, dass das Becken am Anfang und am Ende des Beobachtungszeitraums denselben Wasserstand aufweist.
ODER
Geben Sie einen Ansatz an um a so zu berechnen, dass das Becken am Ende des Beobachtungszeitraums leer ist.